Le equazioni nella fisica

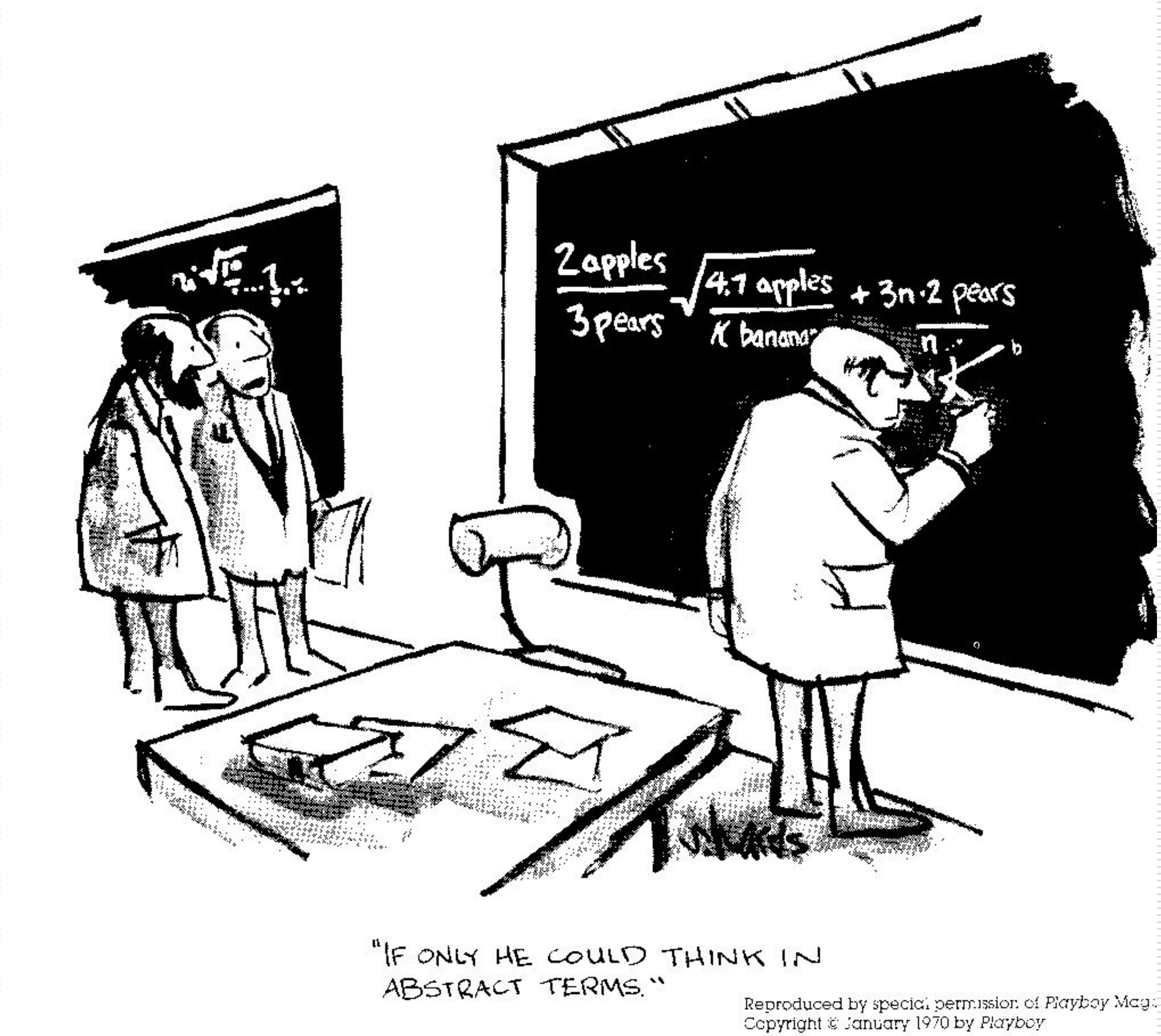
- Un'equazione in fisica definisce i rapporti esistenti tra diverse grandezze misurabili

“*I misuratori*” – Scuola fiamminga del tardo XVI sec.

“La pesatura dell'anima” (psicostasia) - Dal “Libro dei morti”

Le equazioni nella fisica

- Un’equazione in fisica definisce i rapporti esistenti tra diverse grandezze misurabili
- Le grandezze fisiche possono essere variabili oppure costanti
- Per guadagnare in generalità si utilizzano dei simboli per rappresentare le diverse grandezze


2 apples
3 pears
4.7 apples
K bananas
+ 3n·2 pears
"IF ONLY HE COULD THINK IN ABSTRACT TERMS."
Reproduced by special permission of Playboy Mag
Copyright © January 1970 by Playboy

Grandezze fisiche

- Per definire quantitativamente la misura di una grandezza è necessario compararla con una quantità standard della stessa grandezza: l'**unità di misura**.
- Per l'unità di misura di ogni grandezza fondamentale deve essere definito un campione. Tali campioni devono essere:
- **accessibili** (devono poter essere esattamente riprodotti);
- **invarabili** (non devono cambiare nel tempo e/o nello spazio).

Grandezze fisiche

- Non è possibile per ragioni pratiche definire per ogni grandezza fisica un campione di riferimento.
- Si sceglie allora di compiere tale operazione per un numero limitato di grandezze che vengono chiamate **fondamentali**.
- Tutte le altre grandezze si derivano a partire da quelle fondamentali e vengono perciò chiamate **derivate**.

Grandezze fisiche

- Le grandezze derivate si costruiscono a partire dalle grandezze fondamentali attraverso relazioni del tipo:

$$\mathrm{D} = \prod_i [\mathrm{F}_i]^{\alpha_i} \qquad i \in \mathbb{N}_0 \qquad \alpha_\mathrm{i} \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

- Il prodotto viene chiamato **dimensione fisica** della grandezza D e si indica [D].

  (la dimensione fisica di una grandezza fondamentale coincide con la grandezza).

- L'eq. (1) si chiama **equazione dimensionale**.

Esempio: Grandezze fisiche

Grandezze fisiche fondamentali:

tempo [t] lunghezza [l] massa [m]

Derivate

$$D = \prod_i [F_i]^{\alpha_i}$$

velocità = spazio / tempo

$[v] = [l] / [t] = [l]\,[t]^{-1}$

forza = massa*accelerazione

$[F] = [m]\,[a] = [m]\,[v] / [t] = [m]\,[l]\,[t]^{-2}$

Grandezze fisiche

Il numero delle grandezze fondamentali:

- non deve essere molto alto (per non dover definire troppi campioni);
- non può essere molto basso (per non complicare eccessivamente le equazioni dimensionali).

Unità di misura

- Per ogni grandezza (fondamentale o derivata) si definisce una **unità di misura**.

- L'insieme delle unità di misura forma un **Sistema di Unità di misura**

- In una equazione della fisica **tutte le unità devono appartenere allo stesso Sistema**

Unità di misura

- Per ogni grandezza (fondamentale o derivata) si definisce una **unità di misura**.
- Per le unità di misura delle grandezze derivate vale una relazione simile a quella per le grandezze: se U(F*i*) è l'unita di misura della *i*-esima grandezza fondamentale:

$$\mathbb{U}(\mathbb{D}) = k \prod_i \left[\mathbb{U}(\mathbb{F}_i)\right]^{\alpha_i} \qquad i,\ \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \qquad (2)$$

Sistemi di Unità di misura

- L'insieme delle unità di misura (fondamentali e derivate) forma un **Sistema di Unità di misura**

- In una equazione della fisica **tutte le unità devono appartenere allo stesso Sistema di Unità di misura**

- Se nella (2) $k = 1$ per qualunque U(D) il sistema di Unità di Misura è detto **coerente**.

Sistema Internazionale (S.I.)

Unità fondamentali del **Sistema Internazionale** (S.I.):

Grandezze	*Nome*	*Simbolo*
tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
quantità di materia	mole	mole
temperatura termodinamica	kelvin	K
corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd

Sistema c.g.s.

Unità fondamentali

Grandezze	*Nome*	*Simbolo*	Rapporto con unità SI
tempo	secondo	s	
lunghezza	centimetro	cm	$= 10^{-2}$ m
massa	grammo	g	$= 10^{-3}$ kg

Unità derivate

accelerazione	galileo	1 gal = 1 cm/s	$= 10^{-2}$ m s^{-2}
forza	dyne	1 dyn = 1 g cm/s^2	$= 10^{-5}$ N
energia	erg	1 erg = 1 g cm^2/s^2	$= 10^{-7}$ J
potenza	erg / secondo	1 erg/s = 1 g cm^2/s^3	$= 10^{-7}$ W
pressione	baria	1 bar = 1 dyn cm^{-2}	$= 10^{-1}$ Pa
viscosità	poise	1 P = 1 g/(cm s)	$= 10^{-1}$ Pa s

Sistema tecnico-pratico

Unità fondamentali

Grandezze	*Nome*	*Simbolo*
lunghezza	metro	m
forza	chilogrammo forza	kg_f, kg_p, kp
tempo	secondo	s
temperatura	grado Celsius	°C

Unità derivate

massa	unità tecnica di massa	UTM
energia	chilogrammetro	kgm
calore	caloria, chilocaloria	cal, kcal
potenza	cavallo vapore, chilocaloria all'ora, Watt	CV, kcal h^{-1}, W
pressione	kg_f cm^{-2}, atmosfera, millimetro di mercurio	atm, mmHg

Multipli e sottomultipli

- Si usano delle abbreviazioni per semplificare la scrittura di numeri molto grandi o molto piccoli. I multipli e i sottomultipli che vengono utilizzati sono:

Fattore di moltiplicazione	Prefisso		Fattore di moltiplicazione	Prefisso	
	Nome	Simbolo		Nome	Simbolo
10^{1}	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	Femto	f

Grandezze fisiche

- Passaggio da un SUM ad un altro; vi sono due situzioni differenti:

- **le grandezze fondamentali sono le stesse** (SI⇔CGS);

- **le grandezze fondamentali sono differenti** (SI⇔Britannico).

Grandezze fisiche

- **Il caso 1) si tratta nel seguente modo: si vuole passare da S ad S':**

$$\mathrm{U(D)} = k \prod_i \left[\mathrm{U}(\mathrm{F}_i)\right]^{\alpha_i}, \qquad \mathrm{U'(D)} = k \prod_i \left[\mathrm{U'}(\mathrm{F}_i)\right]^{\alpha_i}$$

- **Dati i fattori di ragguaglio tra le grandezze F*i*:**

$$r_{S \to S'}(\mathrm{F}_i)$$

$$\frac{\mathrm{U}(\mathrm{F}_1)}{\mathrm{U'}(\mathrm{F}_1)} = r_{S \to S'}(\mathrm{F}_1), \quad \frac{\mathrm{U}(\mathrm{F}_2)}{\mathrm{U'}(\mathrm{F}_2)} = r_{S \to S'}(\mathrm{F}_2) \ \ldots \ \frac{\mathrm{U}(\mathrm{F}_n)}{\mathrm{U'}(\mathrm{F}_n)} = r_{S \to S'}(\mathrm{F}_n)$$

Grandezze fisiche

- **il fattore di ragguaglio per D,** $r_{S\to S'}(\mathrm{D})$ **, è dato da:**

$$r_{S\to S'}(\mathrm{D}) = \frac{\mathrm{U(D)}}{\mathrm{U'(D)}} = \frac{k\prod_i [\mathrm{U}(\mathrm{F}_i)]^{\alpha_i}}{k\prod_i [\mathrm{U'}(\mathrm{F}_i)]^{\alpha_i}} = \prod_i \left[\frac{\mathrm{U}(\mathrm{F}_i)}{\mathrm{U'}(\mathrm{F}_i)}\right]^{\alpha_i} = \prod_i [r_{S\to S'}(\mathrm{F}_i)]^{\alpha_i}$$

Grandezze fisiche

- **esempio: conversione dell'u.d.m. della forza**

forza =massa · accelerazione

S.I.: Newton (N) c.g.s.: dyne (dyn)

$$1\,N = (1\,kg)(1\,\mathrm{m})(1\,\mathrm{s})^{-2} \qquad 1\,dyn = (1\,g)(1\,\mathrm{cm})(1\,\mathrm{s})^{-2}$$

$$1\,N = (1\,kg)(1\,m)(1\,s)^{-2} = (10^3\,g)(10^2\,cm)(1\,s)^{-2} = 10^5\,g\,cm\,s^{-2} = 10^5\,dyn$$

$$1\,dyn = (1\,g)(1\,cm)(1\,s)^{-2} = (10^{-3}\,kg)(10^{-2}\,m)(1\,s)^{-2} = 10^{-5}\,kg\,m\,s^{-2} = 10^{-5}\,N$$

$$r_{SI\to cgs}(forza) = 10^5 \qquad r_{cgs\to SI}(forza) = 10^{-5}$$

$$r_{SI\to cgs}(forza) = \frac{1}{r_{cgs\to SI}(forza)}$$

Grandezze fisiche

- esempio: conversione dell'u.d.m. della pressione

$$\text{pressione} = \frac{\text{forza}}{\text{superficie}}$$

S.I.: Pascal (Pa) c.g.s.: baria (Ba)

$$1\,Pa = \frac{1\,N}{(1\,m)^2} \qquad 1\,Ba = \frac{1\,dyn}{1\,cm^2}$$

$$1\,Pa = \frac{1\,N}{1\,m^2} = \frac{(1\,kg)(1\,m)(1\,s)^{-2}}{(1\,m)^2} = \frac{(10^3\,g)(10^2\,cm)(1\,s)^{-2}}{(10^2\,cm)^2} = \frac{10^5\,g\,cm\,s^{-2}}{10^4\,cm^2} =$$

$$= \frac{10^5\,dyn}{10^4\,cm^2} = 10\,Ba$$

Grandezze scalari e vettoriali

Grandezze **scalari:**

sono caratterizzate solo da un **intensità**.

(es: area di una figura piana, temperatura di un corpo, intervallo di tempo, energia …)

Grandezze vettoriali o **vettori:**

sono caratterizzate da **intensità**, **direzione** e **verso**.

(es: posizione, velocità e accelerazione di un corpo, forza agente su un corpo …)

Tutte avranno una **unità di misura**

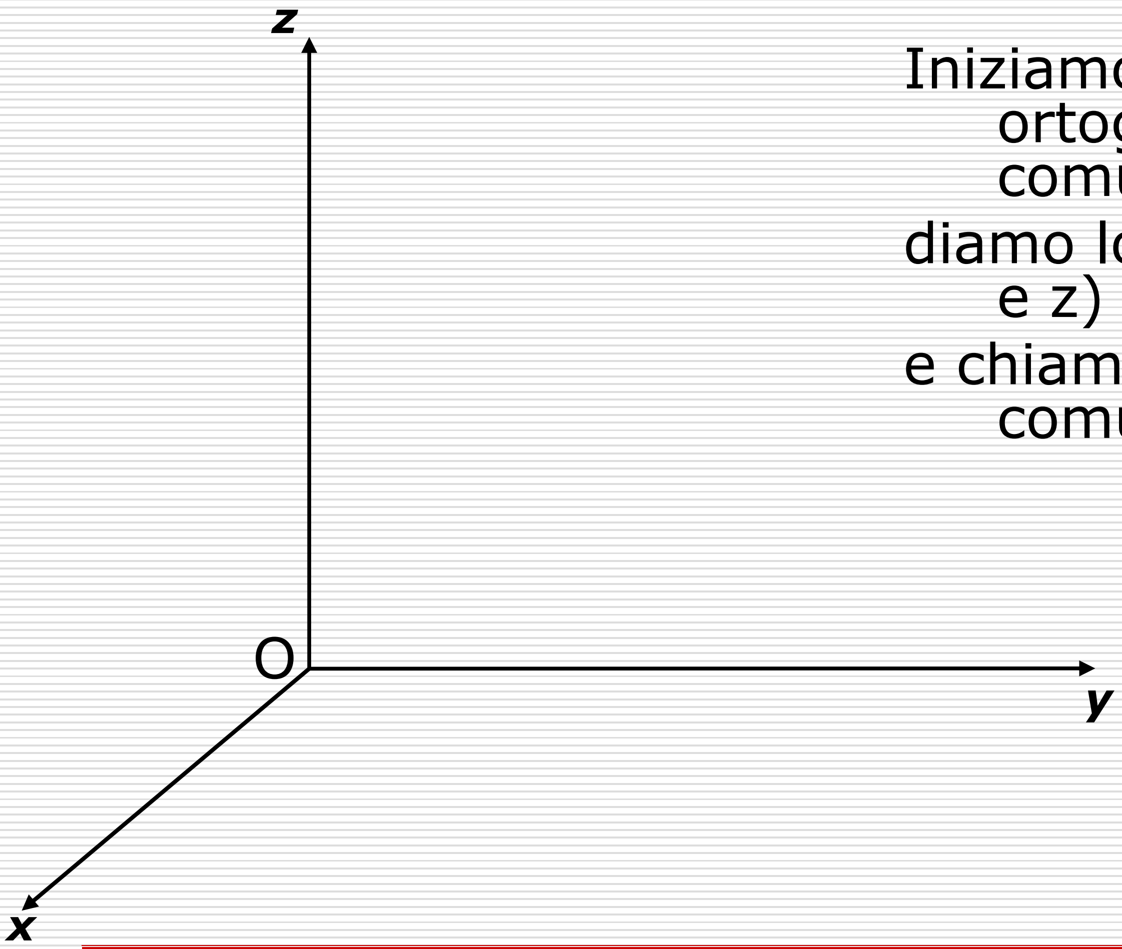
Algebra vettoriale

Le operazioni definite sulle grandezze vettoriali sono:

- SOMMA e DIFFERENZA di vettori
- PRODOTTO di un VETTORE per uno SCALARE
- PRODOTTO SCALARE
- PRODOTTO VETTORIALE
- PRODOTTO MISTO

Ma intanto vediamo come si descrive un vettore:

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano

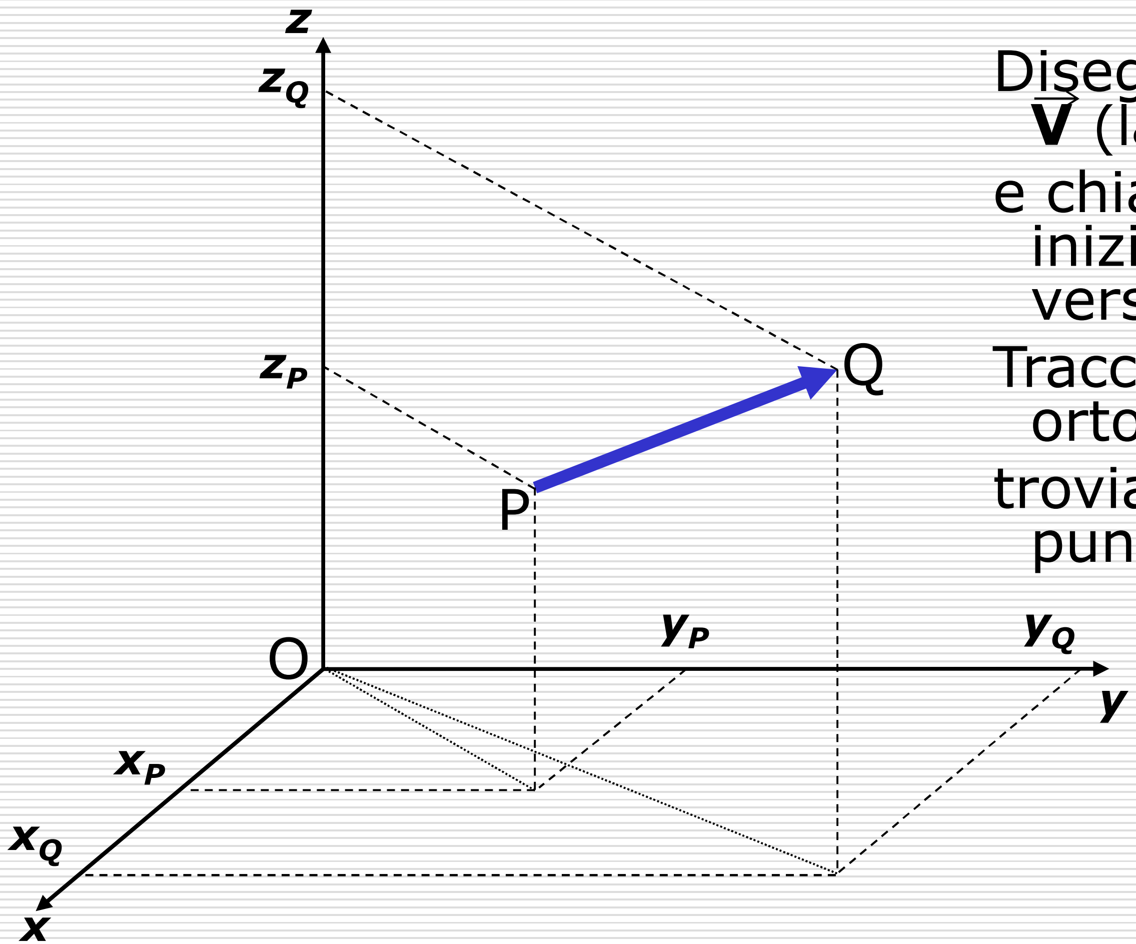


Iniziamo a disegnare tre assi , ortogonali e con un punto in comune …

diamo loro dei nomi (di solito x,y e z) …

e chiamiamo *origine* (O) il punto comune dei tre assi

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano



Disegniamo quindi un **vettore** $\vec{\mathbf{V}}$ (la freccia significa "vettore)

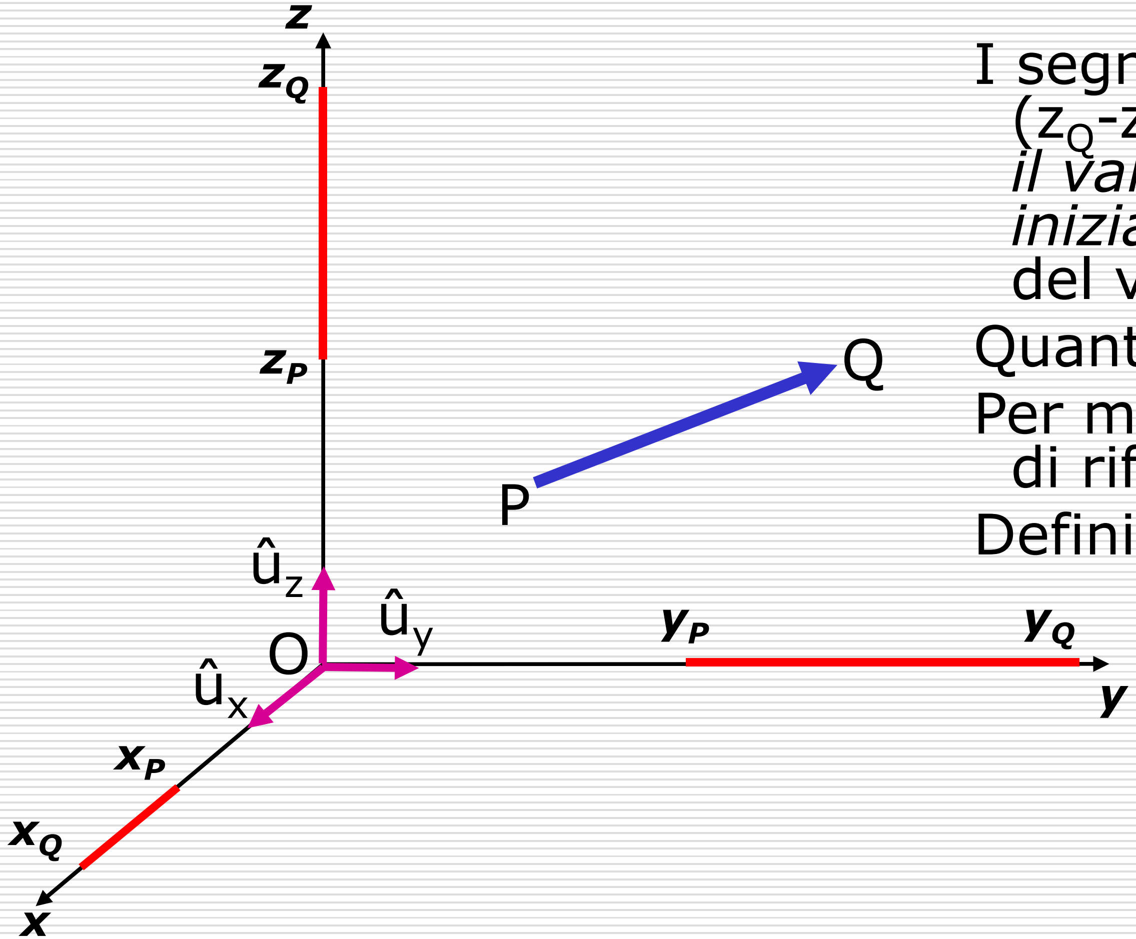
e chiamiamo **estremi** i punti iniziale e finale del vettore (il verso è dato dalla freccia)

Tracciando segmenti ortogonali agli assi …

troviamo le **coordinate** dei punti P…

… e Q

I vettori in un Sistema di Riferimento Cartesiano



I segmenti (x_Q-x_P), (y_Q-y_P) e (z_Q-z_P) *(ricordatevi:* ***sempre*** *il valore finale meno il valore iniziale)* sono le **componenti** del vettore.

Quanto valgono?

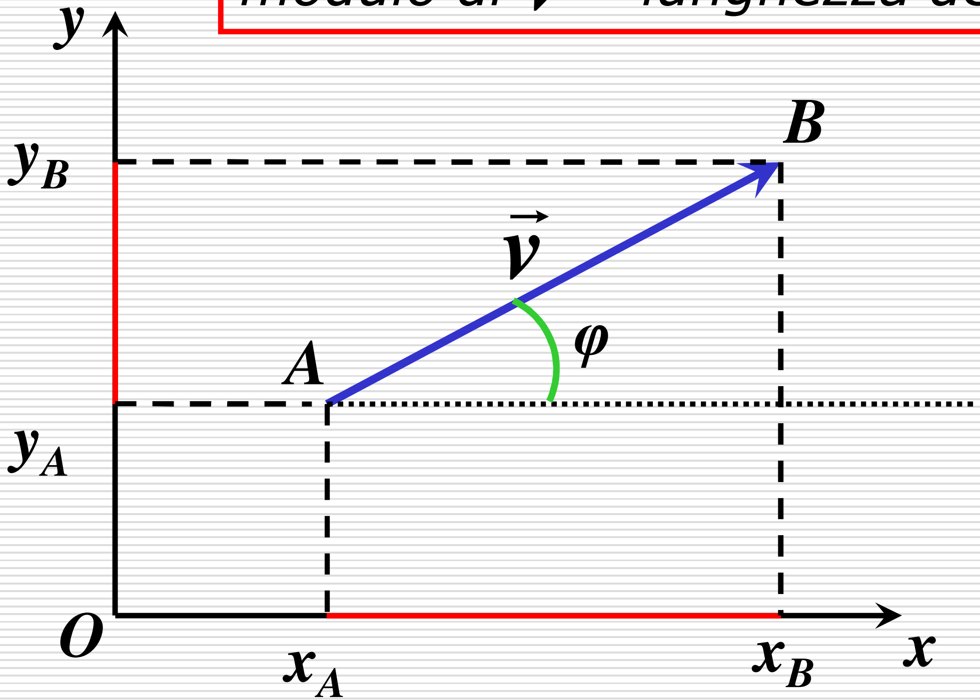
Per misurarle abbiamo bisogno di riferimenti.

Definiamo i **versori** degli assi:

$\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$ e $\hat{u}_z$, come i vettori di lunghezza = 1, orientati secondo gli assi

Vettori nel piano

modulo di $\vec{v}$ = lunghezza del segmento AB

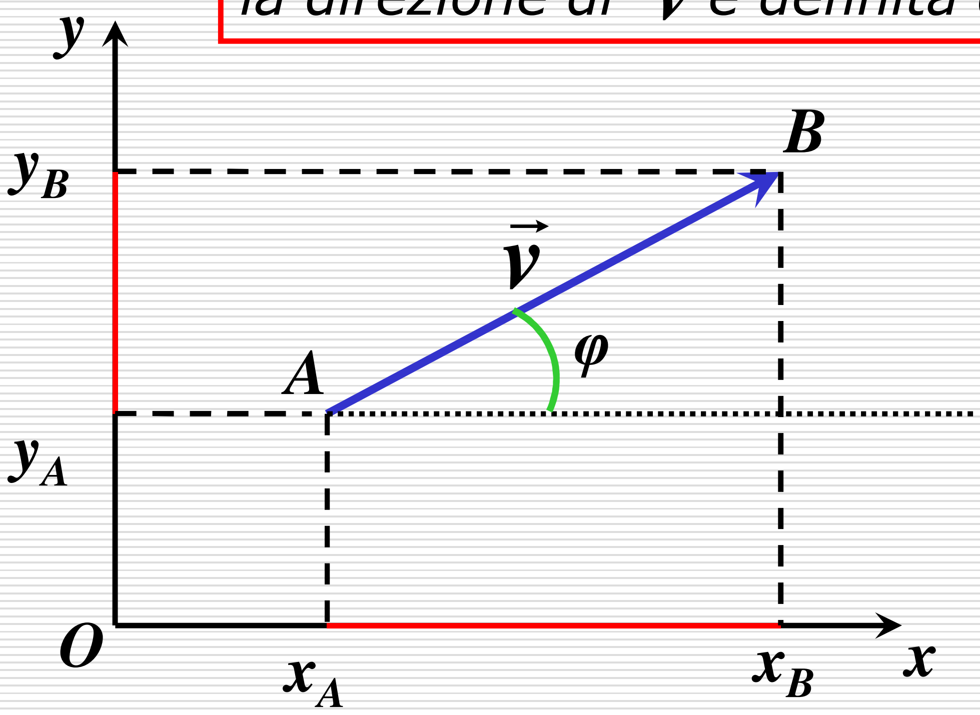


$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Vettori nel piano

la direzione di $\vec{v}$ *è definita dall'angolo* φ

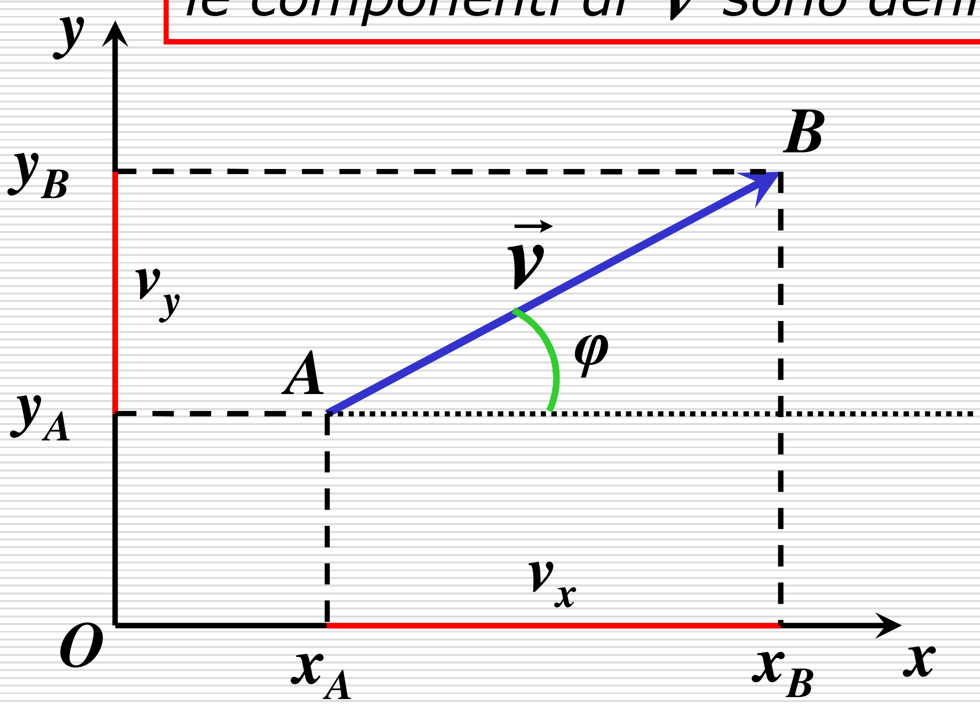


$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

Componenti di vettori nel piano

le componenti di $\vec{v}$ *sono definite per mezzo di* φ



$$\begin{cases} v_x = v \cos \varphi \\ v_y = v \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = x_B - x_A \\ v_y = y_B - y_A \end{cases}$$

Prodotto di un vettore per uno scalare

Dati uno scalare c ed un vettore $\vec{v}$, si definisce il prodotto

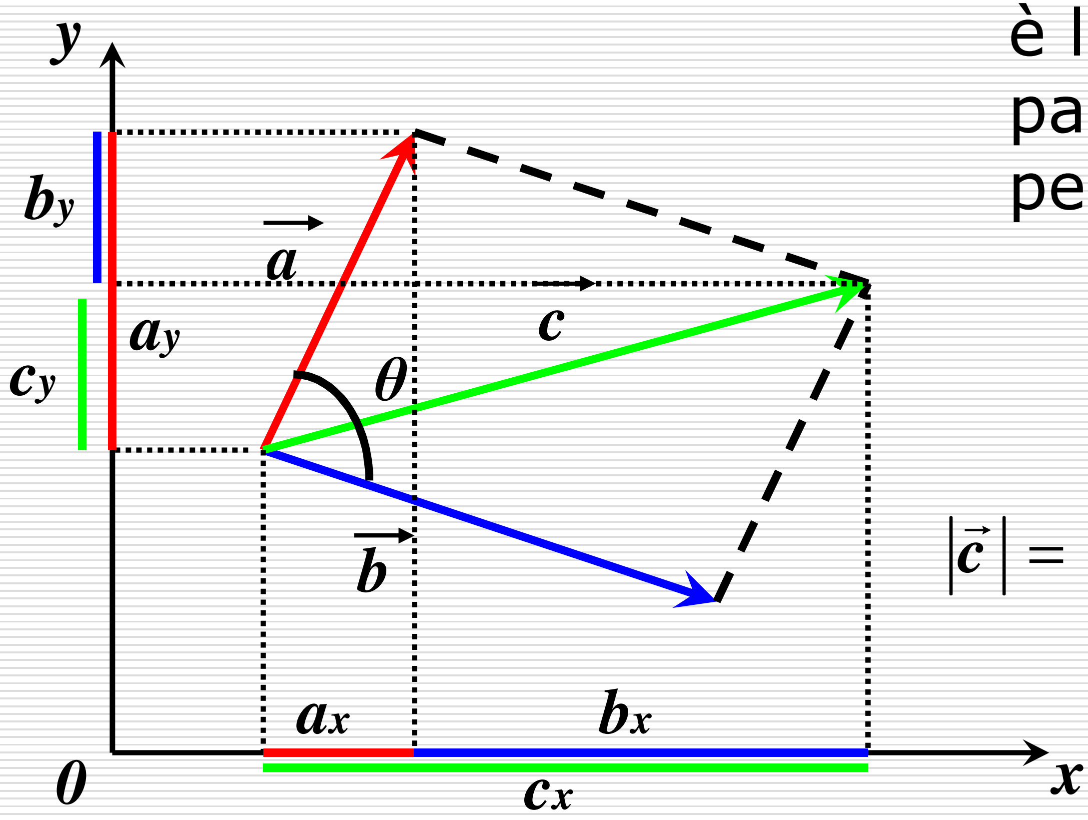
$$\vec{u} = c\,\vec{v}$$

Il vettore $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$. Il modulo di $\vec{u}$ è dato da:

$$|\vec{u}| = |c| \cdot |\vec{v}|$$

Il verso di $\vec{u}$ è lo stesso di $\vec{v}$ se c>0, è opposto a quello di $\vec{v}$ se c<0

Somma di due vettori



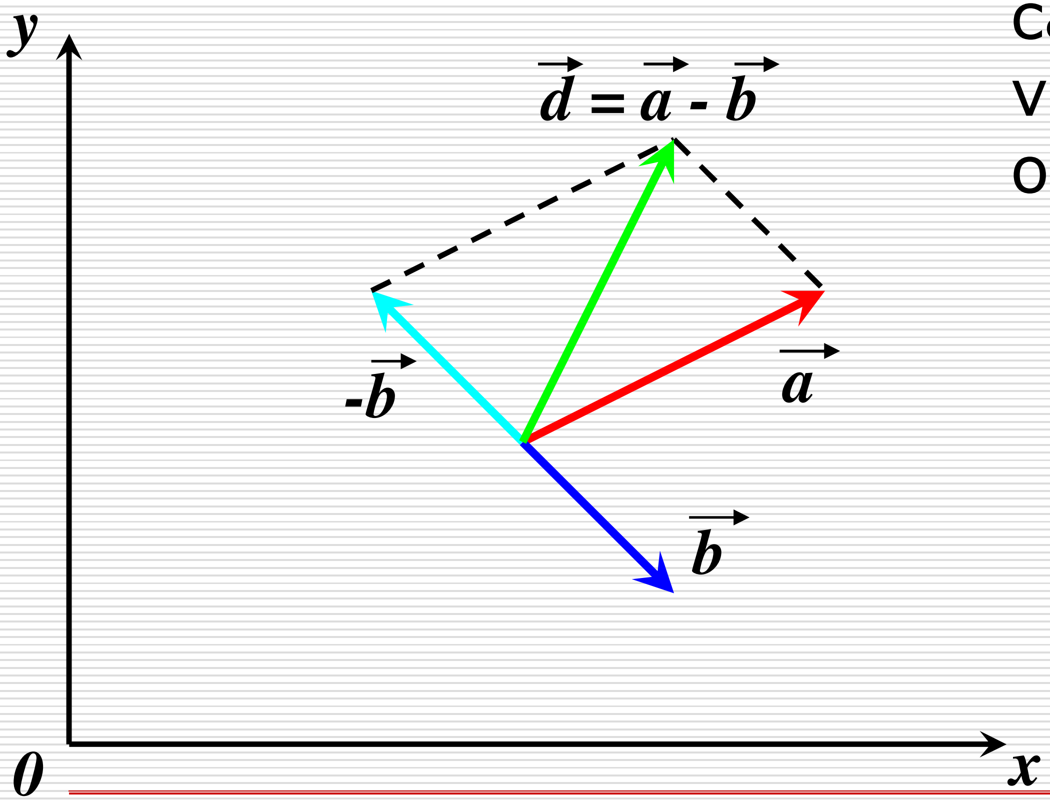
Il vettore somma $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

Differenza di due vettori (1)

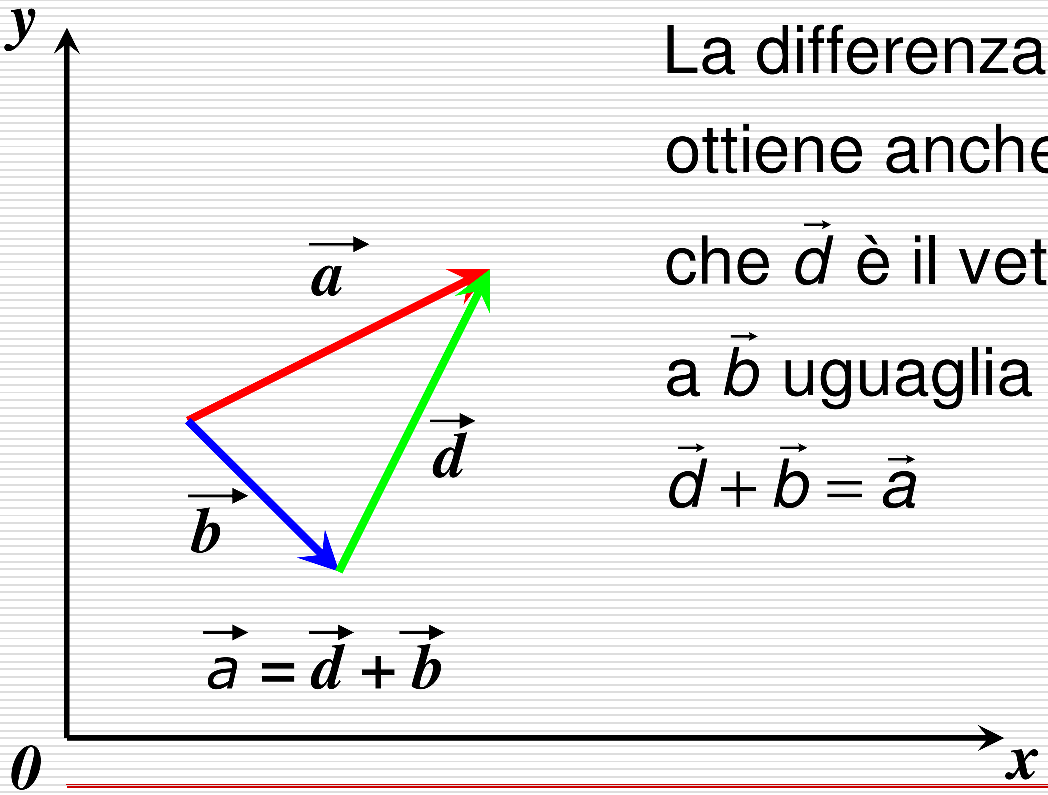


La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ si calcola sommando al vettore $\vec{a}$ il vettore $-\vec{b}$, opposto del vettore $\vec{b}$

$$d_x = a_x - b_x$$

$$d_y = a_y - b_y$$

Differenza di due vettori (2)



La differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ si ottiene anche considerando che $\vec{d}$ è il vettore che sommato a $\vec{b}$ uguaglia $\vec{a}$

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$$

2007-2008 (68)

Quale dei vettori indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza b – a ?

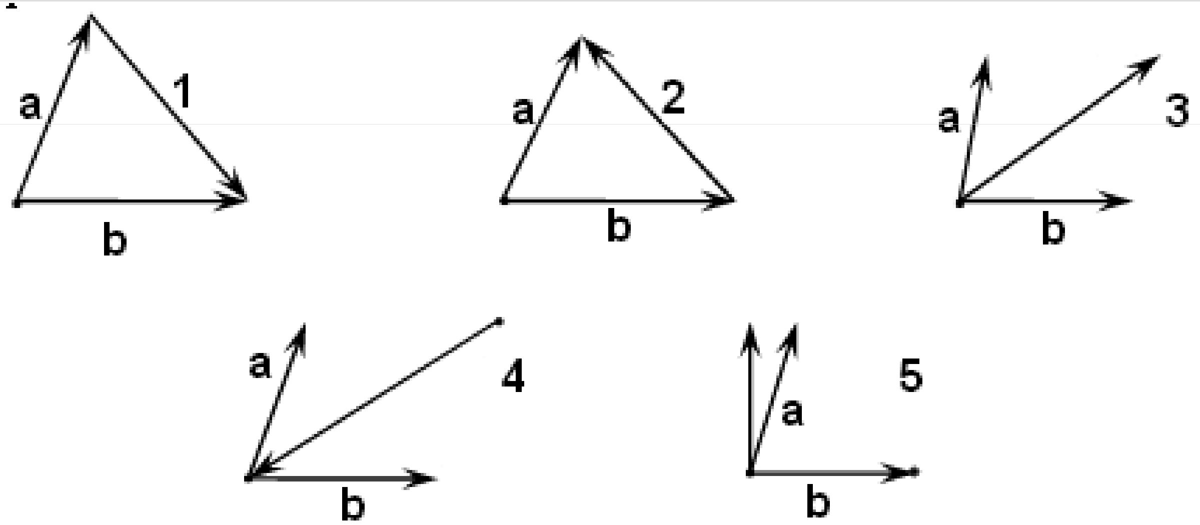
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow \vec{a} + \vec{d} = \vec{b}$$

2005-2006 (63)

Quale dei vettori indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza a – b ?

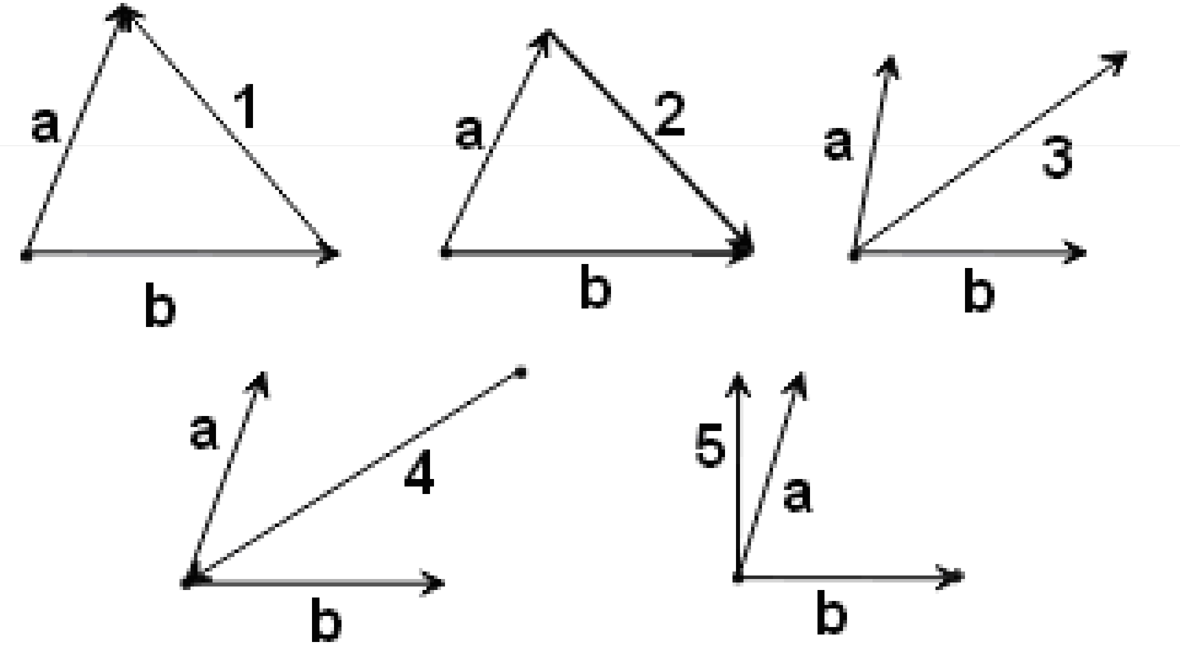
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

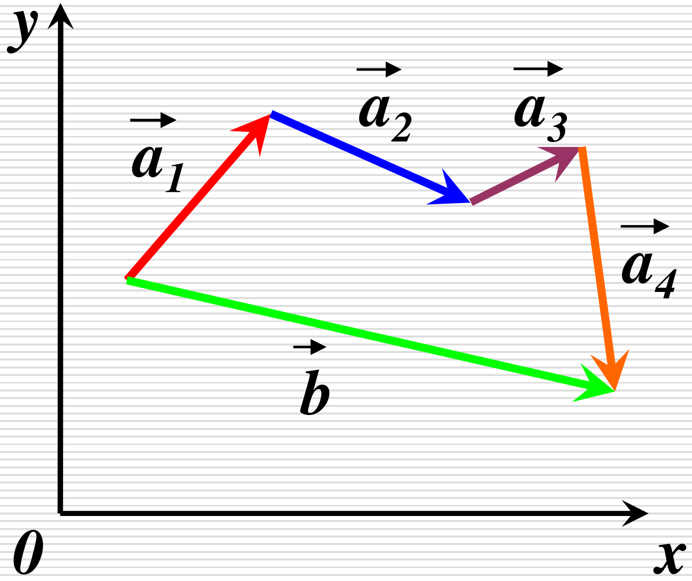


$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = a$$

Somma di N vettori

Dati i vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots , \vec{a}_N$ il vettore somma $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_N$ si calcola nel modo seguente:

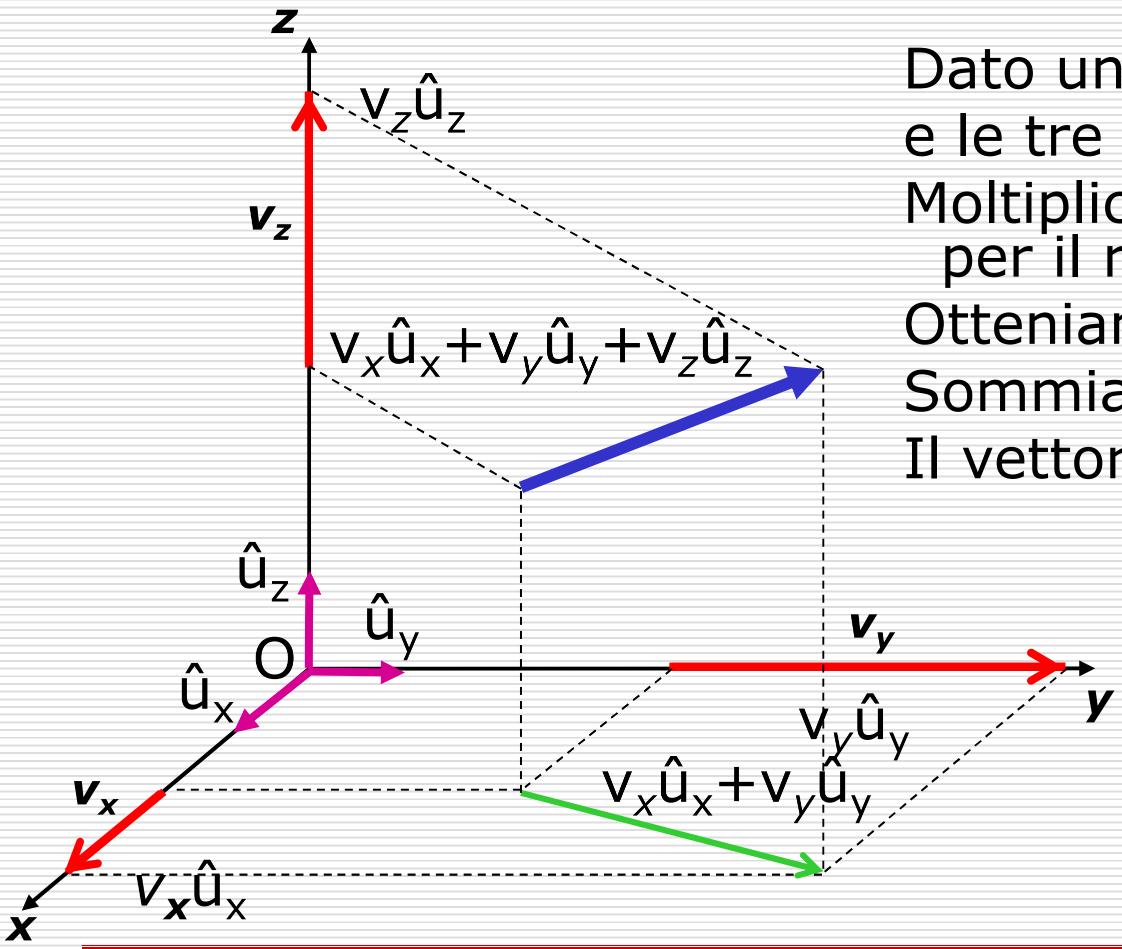
- si costuisce la spezzata formata dai vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_N$
- si congiungono i due estremi liberi di tale spezzata



$$b_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{Nx}$$

$$b_y = a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{Ny}$$

Vettori espressi in termini delle loro componenti



Dato un riferimento cartesiano e le tre componenti di un vettore

Moltiplichiamo ogni componente per il rispettivo versore

Otteniamo tre vettori

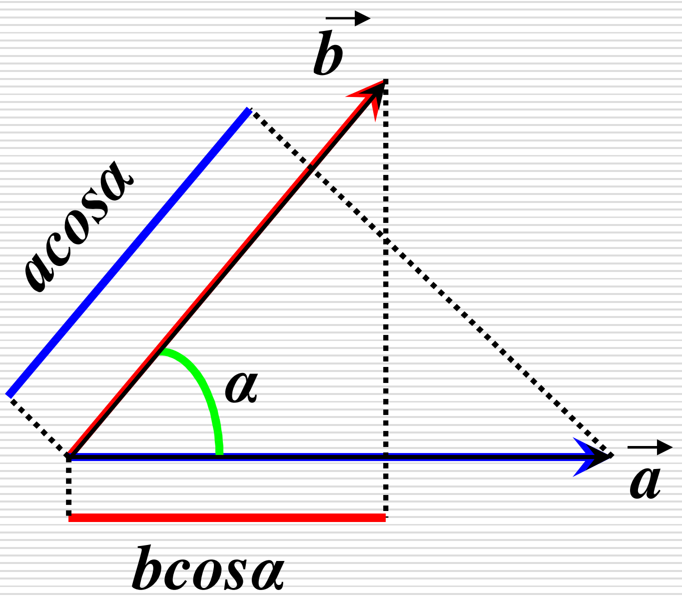
Sommiamo i tre vettori

Il vettore **v** è quindi:

$$\boxed{\mathbf{v}=v_x\hat{u}_x+v_y\hat{u}_y+v_z\hat{u}_z}$$

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una grandezza scalare definita come: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, cos\alpha$



Il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è pari al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$

Ovviamente il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è anche pari al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

Prodotto vettoriale

Dati due vettori a e b, il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che gode delle proprietà seguenti:

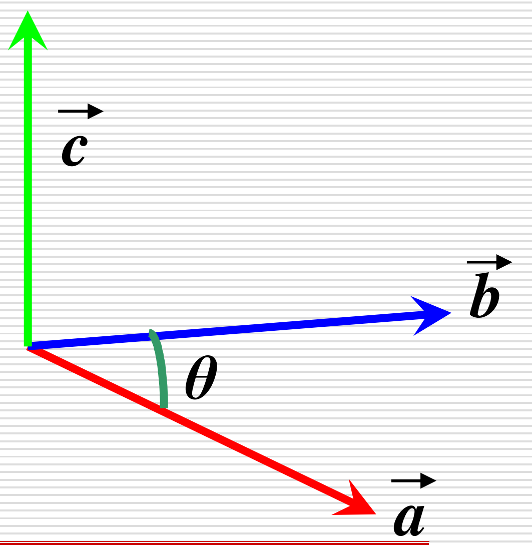
- il modulo di $\vec{c}$ è:

$$c = a\, b \sin\theta$$

  dove θ è l'angolo minore di 180° compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$

- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

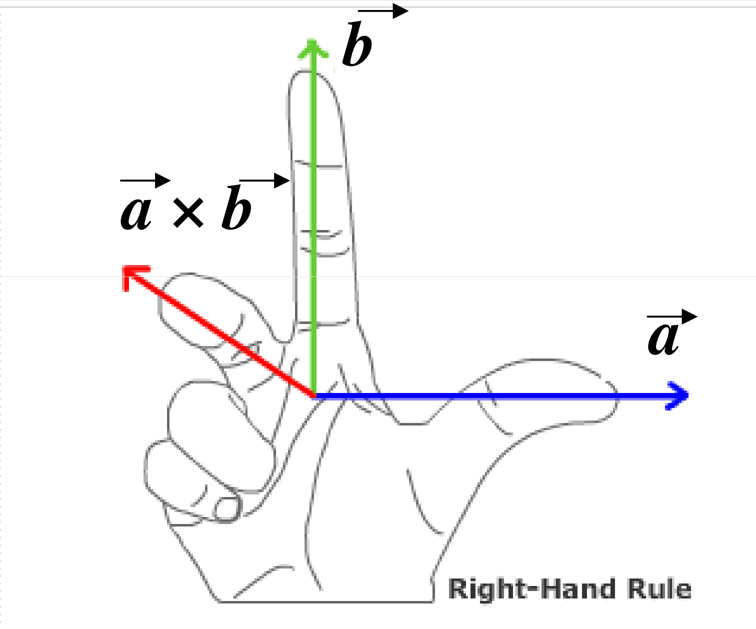
- il verso di $\vec{c}$ è calcolato applicando la regola della mano destra



La regola della mano destra

Prima formulazione

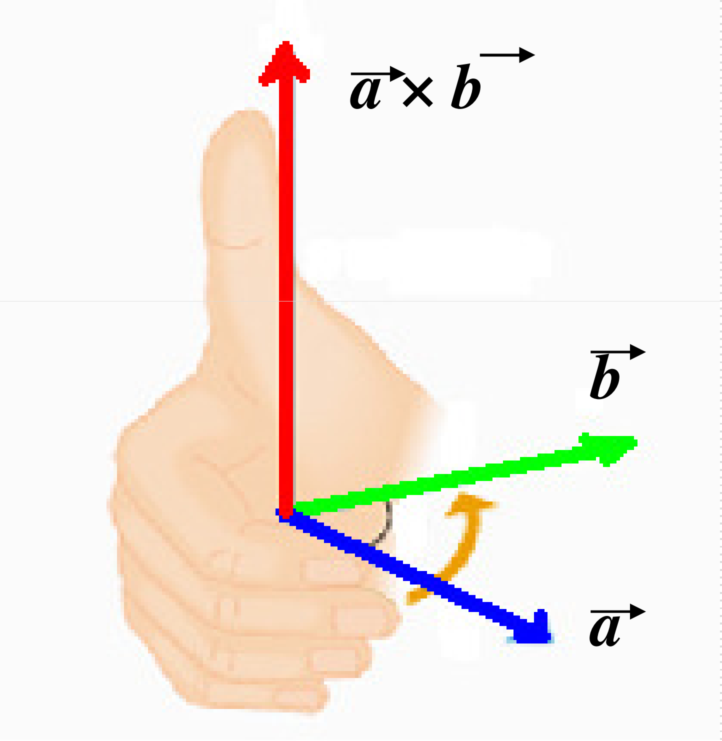
- Si dispone il pollice lungo il primo vettore
- Si dispone l'indice lungo il secondo vettore
- Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale



La regola della mano destra

Seconda formulazione

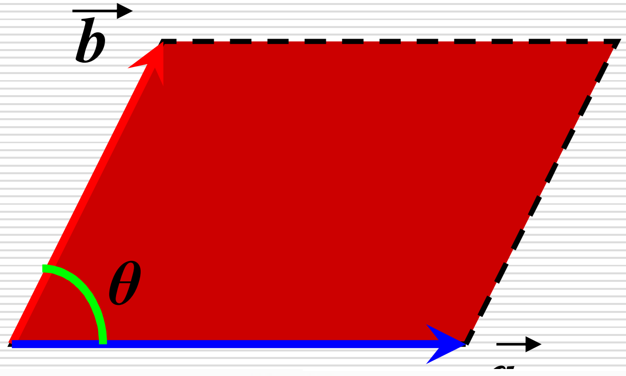
- Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
- Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°
- Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale

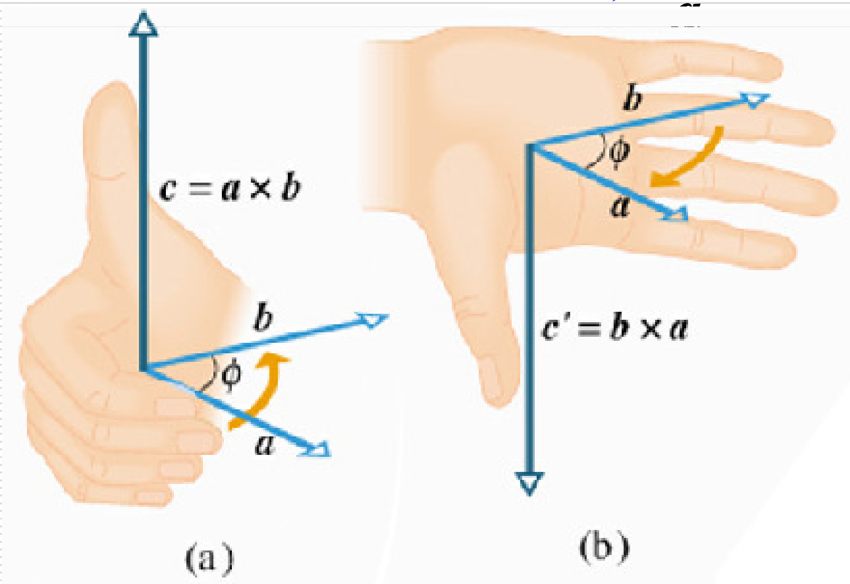


Proprietà del prodotto vettoriale

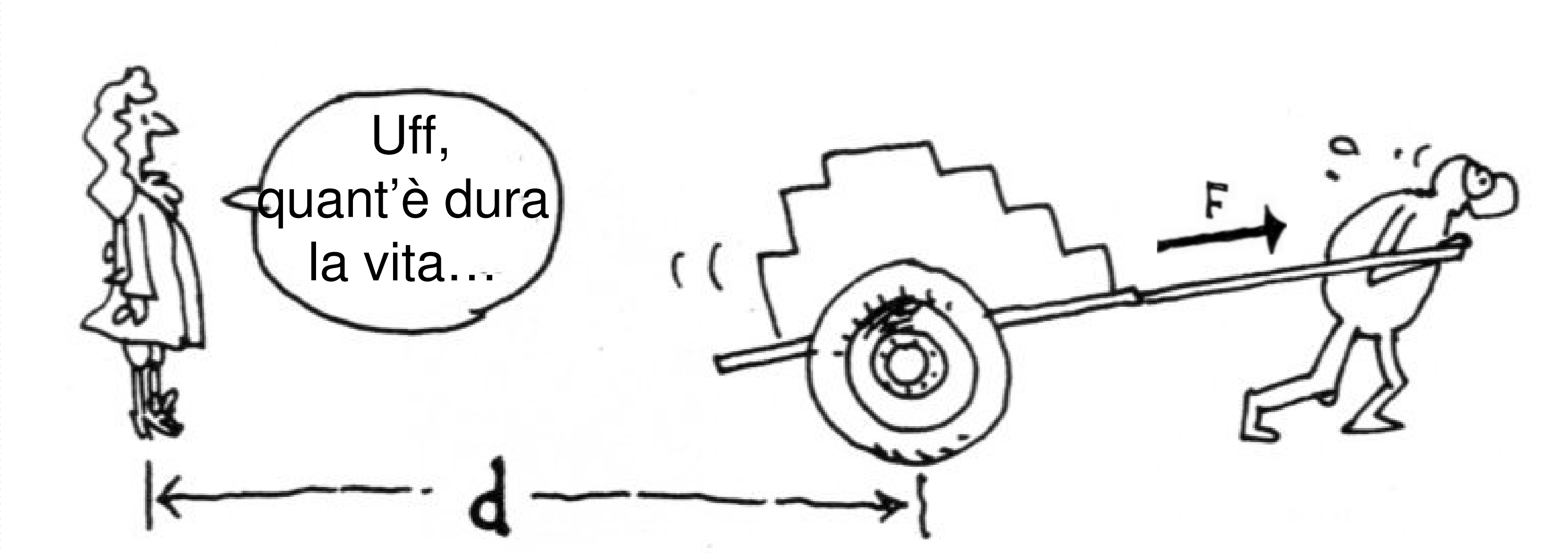
- Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori
- Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli (θ=0)
- Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}}$$





Applicazioni: prodotto scalare



Applicazioni: prodotto vettoriale